PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

KASUS: *INITIAL VALUE PROBLEM (IVP)*

by: siti diyar kholisoh

Materi Kuliah:
Pengantar; Metode Euler; Perbaikan Metode Euler; Metode Runge-Kutta;
Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Biasa secara Simultan

Analisis Numerik/ Gasal 2008-2009/ Jurusan Teknik Kimia/ FTI/ UPN "Veteran" Yogyakarta

CONTOH SOAL #:

Gunakan metode Euler untuk menghitung nilai y pada x = 1 jika:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

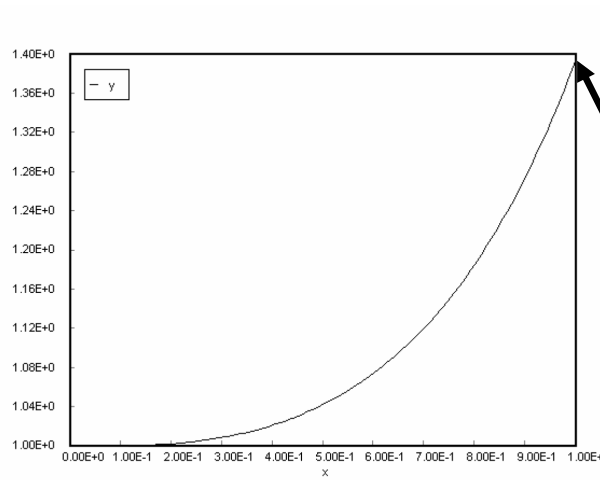
dengan nilai awal: y = 1 pada x = 0

Penyelesaian:

1. Secara analitik:

Coba Anda cek lebih dahulu, berapa hasil yang diperoleh melalui penyelesaian secara analitik...!

2. Secara grafik:



hasil

3. Secara numerik (dengan metode Euler):

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta x \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i, y_i} \\ \frac{dy}{dx} &= x^2 y \end{aligned}\right\} \quad y_{i+1} = y_i + \Delta x \left(x_i^2 \; y_i\right)$$

x = 0 — x = 1

Nilai y diketahui

Nilai y ditanyakan?

Pilih nilai Δx! Misal: Δx = 0,5

x	y
0	1
0,5	??
1	??

Diketahui di dalam soal, sebagai nilai awal *(initial value)*

Akan dihitung, pada langkah integrasi pertama

Akan dihitung, pada langkah integrasi kedua

Hasil

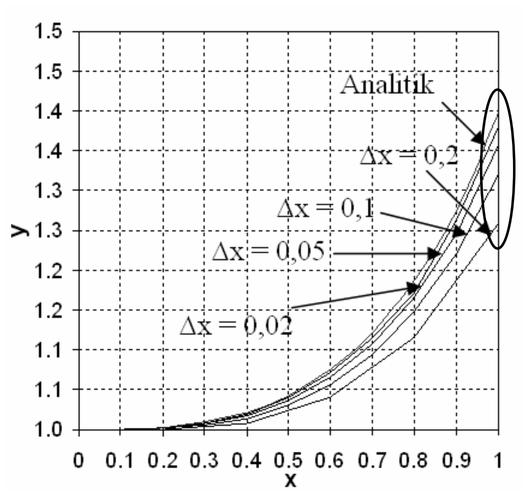
Perhatikan bahwa: $\Sigma \text{ langkah integrasi} = \dfrac{|\text{batas atas - batas bawah}|}{\Delta x}$

Silakan Anda coba selesaikan sendiri…!

Hasil Perhitungan pada Beberapa Nilai Δx:

x	Nilai y				
	Δx				Analitik
	0,1	**0,05**	**0,02**	**0,2**	
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,0000	1,0001	1,0002		1,0003
0,2	1,0010	1,0018	1,0023	1,0000	1,0027
0,3	1,0050	1,0069	1,0081		1,0090
0,4	1,0140	1,0176	1,0199	1,0080	1,0216
0,5	1,0303	1,0361	1,0400		1,0425
0,6	1,0560	1,0650	1,0707	1,0403	1,0747
0,7	1,0940	1,1070	1,1154		1,1211
0,8	1,1476	1,1661	1,1718	1,1152	1,1861
0,9	1,2211	1,2468	1,2635		1,2751
1	**1,3200**	**1,3559**	**1,3792**	**1,2579**	**1,3956**

Representasi Grafik:



Jadi, apakah kesimpulan Anda…?

METODE RUNGE-KUTTA

- **Merupakan metode yang <u>paling banyak diterapkan untuk integrasi numerik persamaan diferensial biasa dengan *initial value problem*,</u> karena menghasilkan pendekatan yang cukup baik.**
- **<u>Metode Euler</u> merupakan salah satu jenis <u>metode Runge-Kutta</u> yang <u>berorde satu</u> (atau n = 1).**
- **Metode Runge-Kutta <u>yang paling umum</u> digunakan adalah <u>metode Runge-Kutta berorde 4</u>.**

Metode Runge-Kutta Orde 4

Penyelesaian persamaan diferensial biasa:

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ dengan **syarat awal:** $y(x_0) = y_0$

mempunyai bentuk:

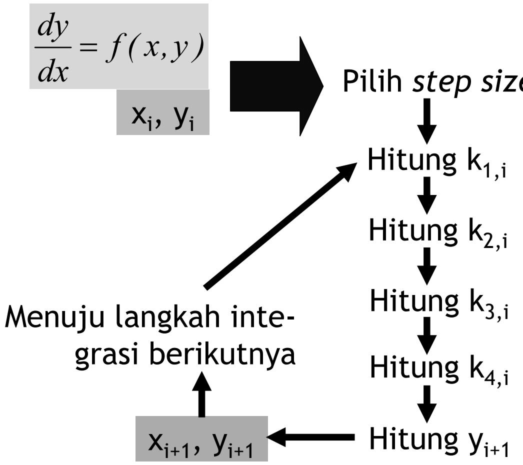
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,h$$

dengan:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h,\; y_i + \tfrac{1}{2}k_1 h)$$
$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h,\; y_i + \tfrac{1}{2}k_2 h)$$
$$k_4 = f(x_i + h,\; y_i + k_3 h)$$

Catatan:
Jika dy/dx atau f hanya **merupakan fungsi x saja**, maka metode R-K 4 ini sama dengan integrasi numerik dgn metode Simpson 1/3.

Langkah Perhitungan:



Sama dengan Contoh Soal Sebelumnya

Perbandingan hasil antara metode Euler dgn RK-4:

x	Nilai y						
	Δx = 0,2		Δx = 0,1		Δx = 0,05		Analitik
	Euler	RK-4	Euler	RK-4	Euler	RK-4	
0	1,0000	1,000000	1,0000	1,000000	1,0000	1,000000	1,000000
0,1			1,0000	1,000333	1,0001	1,000333	1,000333
0,2	1,0000	1,002670	1,0010	1,002670	1,0018	1,002670	1,002670
0,3			1,0050	1,009041	1,0069	1,009041	1,009041
0,4	1,0080	1,021562	1,0140	1,021563	1,0176	1,021563	1,021563
0,5			1,0303	1,042547	1,0361	1,042547	1,042547
0,6	1,0403	1,074655	1,0560	1,074655	1,0650	1,074655	1,074655
0,7			1,0940	1,121126	1,1070	1,121126	1,121126
0,8	1,1152	1,186094	1,1476	1,186095	1,1661	1,186095	1,186095
0,9			1,2211	1,275069	1,2468	1,275069	1,275069
1	**1,2579**	**1,395608**	**1,3200**	**1,395613**	**1,3559**	**1,395612**	**1,395612**

Apakah kesimpulan Anda…?

Penyelesaian Sistem PDB Simultan

Lihat Soal Latihan Nomor 5!

Selesaikan sistem PD simultan berikut:

$$\frac{dy}{dt} = -2y + 5\,z\,e^{-t}$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{y\,z^2}{2}$$

dengan nilai awal: y(0) = 2 dan z(0) = 4

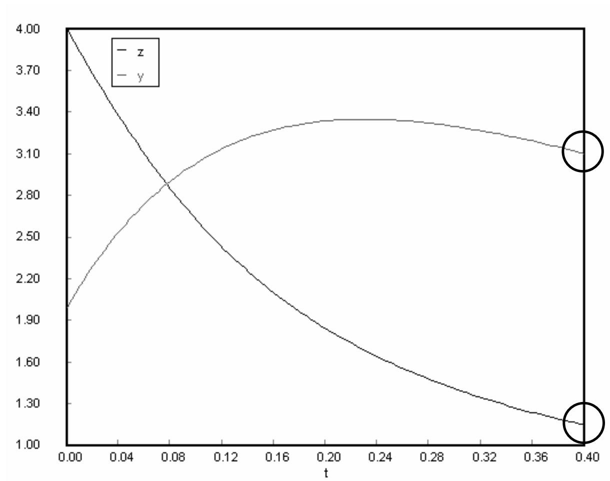
Lakukan perhitungan dari t = 0 hingga t = 0,4, dengan *step size* h = 0,1, menggunakan:

(a) metode Euler

(b) metode Runge-Kutta orde 4

Plotkan hasil perhitungan Anda dlm bentuk grafik.

Plot Sistem Persamaan Simultan



Hasil yang Diperoleh (dgn Polymath):

POLYMATH Report
Ordinary Differential Equations

Calculated values of DEQ variables

	Variable	Initial value	Minimal value	Maximal value	Final value
1	t	0	0	0.4	0.4
2	y	2.	2.	3.354044	3.107515
3	z	4.	1.150256	4.	1.150256

Hasil

Differential equations

1 d(y)/d(t) = -2*y+5*z*exp(-t)

2 d(z)/d(t) = -y*z^2/2

General

Total number of equations	2
Number of differential equations	2
Number of explicit equations	0
Elapsed time	0.000 sec
Solution method	RKF_45
Step size guess. h	0.000001
Truncation error tolerance. eps	0.000001

Hasil-hasil perhitungan yang ditabelkan:

Integrasi ke-	t_i	Euler				RK-4											
		y_i	z_i	y_{i+1}	z_{i+1}	y_i	z_i	k_1	k_2	k_3	k_4	l_1	l_2	l_3	l_4	y_{i+1}	z_{i+1}
1	0.1	2	4	…	…	2	4	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
2	0.2	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
3	0.3	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
4	0.4	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Hasil Hasil

Bandingkan hasil yang Anda peroleh dengan hasil/ penyelesaian secara analitik!

Penyelesaian PDB Berorde Tinggi (n)

Secara umum:

PDB berorde n dapat diubah menjadi n buah PDB berorde 1, yang selanjutnya dapat diselesaikan secara simultan.

Strategi Penyelesaian:

Lakukan beberapa substitusi (silakan Anda pelajari sendiri dalam handout kuliah)

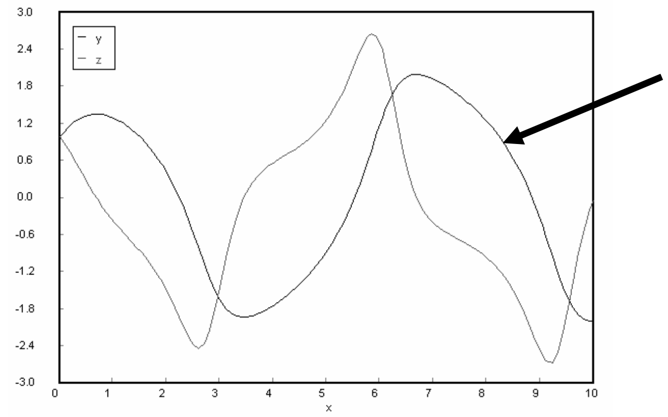
CONTOH SOAL #:
Lihat Soal Latihan Nomor 6!

Persamaan van der Pol yang mrp salah satu model rangkaian listrik *vacuum tubes* dinyatakan sbg:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - (1 - y^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

dengan kondisi awal: y(0) = y'(0) = 1.
Selesaikan persamaan ini dari x = 0 hingga x = 10 menggunakan metode Euler, dengan *step size* sebesar: (a) 0,2, dan (b) 0,1.
Plotkan hasil perhitungan yang Anda peroleh dlm sebuah grafik.

Representasi Persamaan dalam Bentuk Grafik:



Hasil (dengan Polymath):

POLYMATH Report
Ordinary Differential Equations

Calculated values of DEQ variables

	Variable	Initial value	Minimal value	Maximal value	Final value
1	x	0	0	10.	10.
2	y	1.	-2.008257	2.005632	-2.008257
3	z	1.	-2.66319	2.664453	-0.0341488

Differential equations
1 d(y)/d(x) = z
2 d(z)/d(x) = (1-y^2)*z-y

General

Total number of equations	2
Number of differential equations	2
Number of explicit equations	0
Elapsed time	0.000 sec
Solution method	RKF_45
Step size guess. h	0.000001
Truncation error tolerance. eps	0.000001

PR (Soal UAS Genap 0607, Nomor 4)

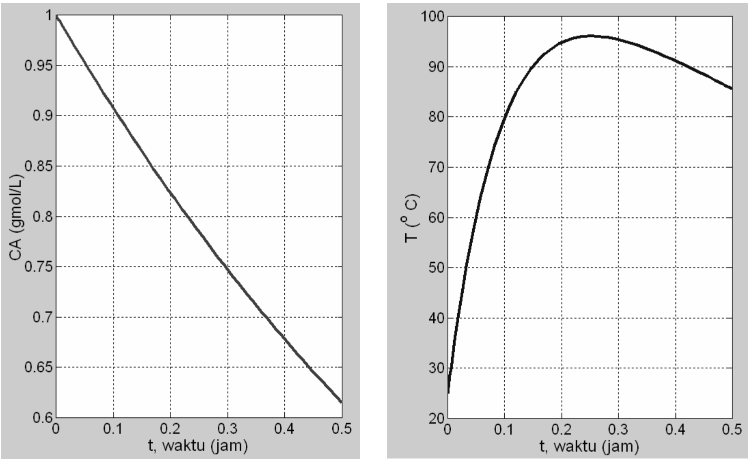
Kinerja sebuah reaktor *batch* nonisotermal dapat digambarkan melalui 2 persamaan berikut:

$$\frac{dC_A}{dt} = -\exp\left(-\frac{10}{T+273}\right) C_A$$

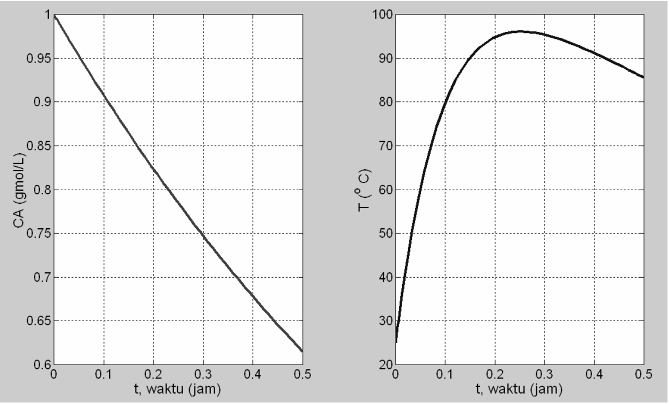
$$\frac{dT}{dt} = 1000\,\exp\left(-\frac{10}{T+273}\right) C_A - 10\,(T-20)$$

dengan C_A menyatakan konsentrasi reaktan (dalam gmol/L) dan T menyatakan suhu di dalam reaktor (dalam ^oC) pada setiap saat t (dalam jam). **Kondisi awal** sistem reaksi ini (pada t = 0): C_{A0} = 1 gmol/liter dan T_0 = 25^{o}C. Berapakah C_A dan T pada **t = 0,5 jam**?
Gunakan dan bandingkan penggunaan metode:
(a) Euler, dan
(b) Runge-Kutta orde 4

Representasi Persamaan dalam Bentuk Grafik:



Hasil (dengan Matlab):



Hasil secara analitik: C_A = 0,6150 gmol/L dan
T = 85,5778 ^oC